11 КЛАС

ВІДПОВІДІ

до підсумкових контрольних робіт для ДПА

МАТЕМАТИКА

2015

Видавництво «Підручники і посібники»

ЗМІСТ

ВАРІАНТ 1

	А	Б	В	Г
1			Х	
2		Х		
3				Х
4	Х			
5		Х		
6			Х	
7				Х
8			Х	
9				Х
10	Х			
11		Х		
12				Х

1. $42 - 18 + 24 : 6 = 42 - 18 + 4 = 28.$ *Відповідь*: В.

2. $\begin{cases} x = 2y - 1, \\ x + 5y = 13; \end{cases} \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 2y - 1 + 5y = 13; \end{cases} \begin{cases} x = 2y - 1, \\ 7y = 14; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$ (3; 2). *В-дь*: Б.

3. $a^{-4} = \dfrac{1}{a^4}$. *Відповідь*: Г.

4. $b_1 = 16$; $q = 8 : 16 = 0{,}5$; $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{16}{1-0{,}5} = \dfrac{16}{0{,}5} = 32$. *В-дь*: А.

5. $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ$. *Відповідь*: Б.

6. $5^{2-\sqrt{3}} : 5^{3-\sqrt{3}} = 5^{2-\sqrt{3}-3+\sqrt{3}} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$. *Відповідь*: В.

7. $y' = \left(x^7 - \cos x\right)' = \left(x^7\right)' - (\cos x)' = 7x^6 + \sin x$. *Відповідь*: Г.

8. $S = \int\limits_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8.$ *Відповідь*: В.

9. $\angle APB = \angle APK + \angle KPB = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ.$ *Відповідь*: Г.

10. $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$. $\overrightarrow{AB}(3-(-1); 2-0) = \overrightarrow{AB}(4; 2).$ *Відповідь*: А.

11. $V = \dfrac{1}{3} S_{о.} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 15 \cdot 4 = 20$ (см^3). *Відповідь*: Б.

12. Прямі b і c не можуть бути паралельними, бо в протилежному випадку через точку перетину прямих a і c проходило б дві прямі, які паралельні прямій b, що неможливо. *Відповідь*: Г.

13. $\dfrac{2}{3}\lg 27 + 3\lg 2 - \dfrac{1}{2}\lg 36 = \lg 27^{\frac{2}{3}} + \lg 2^3 - \lg 36^{\frac{1}{2}} = \lg 9 + \lg 8 - \lg 6 =$

$= \lg\left(\dfrac{9 \cdot 8}{6}\right) = \lg 12$; $\lg x = \lg 12$, тому $x = 12$. *Відповідь:* 12.

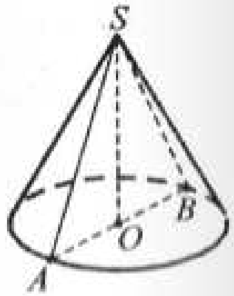
14. Число 30 має 8 дільників: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30. Отже, не дільників є $30 - 8 = 22$. Шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{22}{30} = \dfrac{11}{15}$. *В-дь:* $\dfrac{11}{15}$.

15. $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} - 8 = 0$. Уведемо заміну: $\sqrt[4]{x} = y$ $(y \geq 0)$. $y^2 + 2y - 8 = 0$;

$y_1 = -4$, $y_2 = 2$. $y_1 = -4$ не задовольняє умову $y \geq 0$.

Отже, $y = 2$; $\sqrt[4]{x} = 2$; $x = 2^4$; $x = 16$. *Відповідь*: 16.

16. Нехай SO — конус, ΔASB — осьовий переріз, $SO = 5$ см, $R = OA$ — радіус основи. $SA - OA = 1$ см. $SA = (1 + R)$ см. З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $AO^2 + SO^2 = SA^2$; $R^2 + 5^2 = (1 + R)^2$; $R^2 + 25 = 1 + 2R + R^2$; $2R = 24$; $R = 12$ (см). Тоді $SA = 1 + 12 = 13$ (см). Площа бічної поверхні конуса дорівнює: $S_{б.} = \pi Rl = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi$ (см^2).



Відповідь: 156π см^2.

17. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$; $2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$; $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$;

1) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$; $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z$.

2) $\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$. *Відповідь:* $(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + n\pi$; $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ n, k \in Z$.

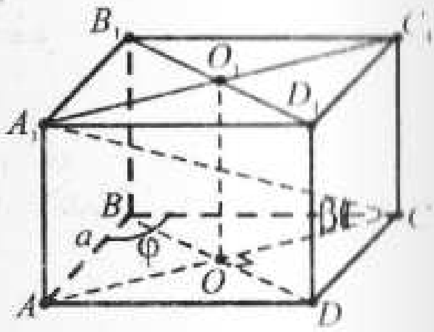
18. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 3$. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 3$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $3x^2 + 12x - 3 = 0$; $x^2 + 4x - 1 = 0$;

$x_1 = -2 - \sqrt{5}$; $x_2 = -2 + \sqrt{5}$.

	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Точкою максимуму є точка $x_1 = -2 - \sqrt{5}$. *Відповідь:* $-2 - \sqrt{5}$.

19. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана пряма призма, $ABCD$ — ромб, $AB = a$. $BB_1 \perp AB$. $BB_1 \perp BC$, тому $\angle CBA$ — кут бічними гранями ABB_1 і BCC_1, $\angle CBA = \varphi$. $BD < AC$, тому A_1C — більша діагональ призми. AC — проекція діагоналі A_1C на площину основи, тому $\angle A_1CA = \beta$. За властивістю діагоналей ромба $AC \perp BD$, тому ΔAOB — прямокутний; $\angle ABO = \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔAOB ($\angle O = 90°$):



$AO = AB\sin\angle B = a\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Тоді $AC = 2AO = 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

З ΔA_1AC ($\angle A = 90°$): $AA_1 = AC\text{tg}\angle C = 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}\text{tg}\beta$.

Отже, $V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = AB \cdot BC\sin\angle CBA \cdot AA_1 =$

$= a \cdot a\sin\varphi \cdot 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}\text{tg}\beta = 2a^3\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi}{2}\text{tg}\beta$. *Відповідь:* $2a^3\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi}{2}\text{tg}\beta$.

ВАРІАНТ 2

	А	Б	В	Г
1				X
2			X	
3				X
4		X		
5			X	
6				X
7	X			
8		X		
9				X
10				X
11		X		
12			X	

1. $2 \cdot (70 - 8^2) = 2 \cdot (70 - 64) = 2 \cdot 6 = 12$. *Відповідь*: Г.

2. Розв'язком рівняння $x - y = 5$ є пара чисел (7; 2), бо $7 - 2 = 5$. *Відповідь*: В.

3. $329 \cdot 10^{-5} = 3{,}29 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = 3{,}29 \cdot 10^{-3}$. *Відповідь*: Г.

4. $a_1 = 3$; $d = -2$; $a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \cdot (-2) = -17$. *В-дь*: Б.

5. $\cos 405° = \cos(45° + 360°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Відповідь*: В.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq -1; \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 3;\ 0 < x - 1 \leq 3;\ 1 < x \leq 4$. *В-дь*: Г.

7. $y' = \left(7 - e^x\right)' = 7' - \left(e^x\right)' = -e^x$. *Відповідь*: А.

8. $S = \int\limits_0^2 x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 \Big|_0^2 = \dfrac{1}{4} \cdot \left(2^4 - 0^4\right) = 4$. *Відповідь*: Б.

9. Оскільки сума вказаних кутів не дорівнює 180°, то ці два кути не суміжні, а, значить, вони вертикальні. Отже, один з цих кутів дорівнює $260° : 2 = 130°$. Тоді шуканий гострий кут дорівнює $180° - 130° = 50°$.

Відповідь: Г.

10. $M(4; -3)$. $MO = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. *Відповідь*: Г.

11. $S_{б.} = 6 \cdot 5 = 30$ (см²). *Відповідь*: Б.

12. Пряма m не може перетинати площину α, бо в протилежному випадку вона не була би паралельною прямій AB. *Відповідь*: В.

13. $\log_6(2\log_5\sqrt{5}) + 4^{\frac{1}{2}\log_4 9} = \log_6\left(2 \cdot \dfrac{1}{2}\right) + 4^{\log_4 3} = 0 + 3 = 3$. *Відповідь*: 3.

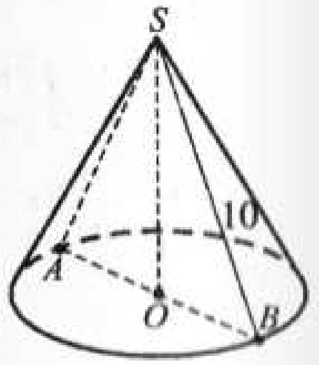
14. Імовірність того, що першою буде витягнуто кульку з номером 1, дорівнює $\dfrac{1}{5}$. Імовірність того, що другою буде витягнуто кульку з номером 2, — $\dfrac{1}{4}$; третьою — з номером 3 — $\dfrac{1}{3}$; четвертою — з номером 4 — $\dfrac{1}{2}$, п'ятою — з номером 5 — 1. Імовірність того, що всі кульки вийнято по порядку послідовної нумерації, дорівнює $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{120}$. *В-дь:* $\dfrac{1}{120}$.

15. $2\sqrt{x-1} - \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} = 5$. ОДЗ: $x - 1 > 0; x > 1$. Нехай $\sqrt{x-1} = y$ $(y > 0)$. Тоді

$2y - \dfrac{3}{y} = 5;\ 2y^2 - 5y - 3 = 0;\ y_1 = -\dfrac{1}{2}$ — не задовольняє умову $y > 0$; $y_2 = 3$.

$\sqrt{x-1} = 3;\ x - 1 = 9;\ x = 10$. *Відповідь:* 10.

16. Нехай SO — заданий конус, $l = SB = 10$ см, AB — діаметр основи, $SO : AB = 2 : 3$. Нехай $SO = 2x$, тоді



$AB = 3x$, $OB = \dfrac{3}{2}x$. З ΔSOB ($\angle O = 90°$):

$SO^2 + OB^2 = SB^2$; $(2x)^2 + \left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 = 10^2$; $4x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 = 100$;

$\dfrac{25}{4}x^2 = 100$; $x^2 = 16$; $x = 4$ (см). Таким чином, $R = OB =$

$= \dfrac{3}{2} \cdot 4 = 6$ (см). $S_{п.} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$ (см^2). *В-дь:* 96π см^2.

17. $\sin 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$. $2\sin x\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$; $\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$;

1) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in Z$.

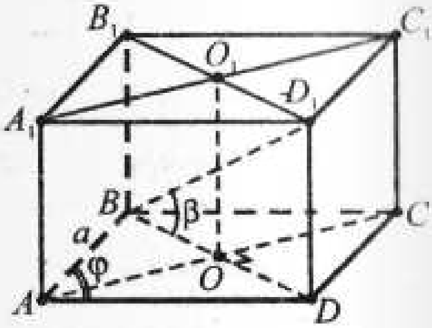
2) $\sin x = 0$; $x = k\pi,\ k \in Z$. *Відповідь:* $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$; $k\pi,\ n, k \in Z$.

18. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 18x - 2$. $f'(x) = -3x^2 - 6x + 18$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $-3x^2 - 6x + 18 = 0$; $x^2 + 2x - 6 = 0$; $x_1 = -1 - \sqrt{7}$; $x_2 = -1 + \sqrt{7}$.

	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

Точкою мінімуму є точка $x_1 = -1 - \sqrt{7}$. *Відповідь:* $-1 - \sqrt{7}$.

19. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана пряма призма, $ABCD$ — ромб, $AB = a$. $AA_1 \perp AB$. $AA_1 \perp AD$, тому $\angle BAD$ — кут між площинами двох бічних граней призми, $\angle BAD = \varphi$. $BD < AC$, тому D_1B — менша діагональ призми. DB — проекція діагоналі D_1B на площину основи, тому $\angle D_1BD = \beta$. За властивістю діагоналей ромба $AC \perp BD$, тому



ΔAOB — прямокутний; $\angle BAO = \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔAOB

($\angle O = 90°$): $BO = AB\sin\angle A = a\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Тоді $BD = 2BO = 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

З ΔD_1BD ($\angle D = 90°$): $DD_1 = BD\,\mathrm{tg}\angle B = 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\beta$.

Отже, $V = S_{ABCD} \cdot DD_1 = AB \cdot AD\sin\angle BAD \cdot DD_1 =$

$= a \cdot a\sin\varphi \cdot 2a\sin\dfrac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\beta = 2a^3\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. *Відповідь:* $2a^3\sin\varphi\sin\dfrac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\beta$.

ВАРІАНТ 3

	А	Б	В	Г
1			X	
2		X		
3			X	
4		X		
5		X		
6		X		
7			X	
8				X
9			X	
10	X			
11	X			
12				X

1. $26-2\cdot 8+7=26-16+7=17.$ *Відповідь*: В.

2. $\begin{cases}x+y=3,\\3x-y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=3,\\4x=8;\end{cases}$ $\begin{cases}y=3-x,\\x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ (2; 1). *Відповідь*: Б.

3. $\left(a^4\right)^{-2}=a^{-8}.$ *Відповідь*: В.

4. $a_2=a_1+d$; $7=5+d$; $d=2$; $a_{21}=a_1+20d=5+20\cdot 2=45.$ *Відповідь*: Б.

5. $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5.$ *Відповідь*: Б.

6. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5}=9^{1,5}=\left(3^2\right)^{1,5}=3^3=27.$ *Відповідь*: Б.

7. $y'=\left(6x^3\right)'=6\left(x^3\right)'=6\cdot 3x^2=18x^2.$ *Відповідь*: В.

8. $S=\int\limits_0^2(x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot 2^2+2-0=4.$ *Відповідь*: Г.

9. Суміжними можуть бути кути 92° і 88°, бо 92° + 88° = 180°. *Відповідь*: В.

10. $\vec{m}=2\vec{a}(3;-1)-3\vec{b}(2;4)=\overrightarrow{(6;-2)}-\overrightarrow{(6;12)}=\overrightarrow{(0;-14)}.$ *Відповідь*: А.

11. $V=\frac{1}{3}S_{о.}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 4=48$ (см^3). *Відповідь*: А.

12. Прямі a і b не можуть перетинатися, бо в протилежному випадку пряма a перетнула б площину β, що неможливо. *Відповідь*: Г.

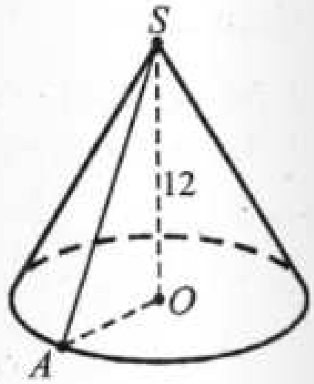
13. $\log_4 32+2\log_4 3-\log_4 2=\log_4 32+\log_4 9-\log_4 2=\log_4(32\cdot 9:2)=\log_4(16\cdot 9)=$
$=\frac{\log_2(9\cdot 16)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(3\cdot 4)^2=\log_2 12.$ Отже, $\log_2 x=\log_2 12$; $x=12$. *В-дь*: 12.

14. Суму номерів, яка дорівнюватиме 12, можуть утворити такі номери карток: 11 і 1, 10 і 2, 9 і 3, 8 і 4, 7 і 5, усього таких пар є 5. Кількість усіх пар $C_{12}^2=\frac{12\cdot 11}{2}=66$. Тоді шукана ймовірність дорівнює $\frac{5}{66}$. *Відповідь:* $\frac{5}{66}$.

15. $x=\sqrt[3]{x^3+x^2+4x-5}$; $x^3=x^3+x^2+4x-5$; $x^2+4x-5=0$; $x_1=-5$, $x_2=1$.
Відповідь: –5; 1.

16. Нехай SO — заданий конус, $SO = 12$ см, SA — твірна конуса, OA — радіус основи, $SA + OA = 18$ см. Нехай $OA = R$, тоді $SA = 18 - R$. З ΔSOA ($\angle O = 90°$):
$SA^2 - OA^2 = SO^2$; $(18 - R)^2 - R^2 = 12^2$;
$324 - 36R + R^2 - R^2 = 144$; $36R = 180$; $R = 5$ (см). Отже,
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi$ (см^3).

Відповідь: 100π см^3.



17. $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$. $2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$; $\sin x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$;

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$.

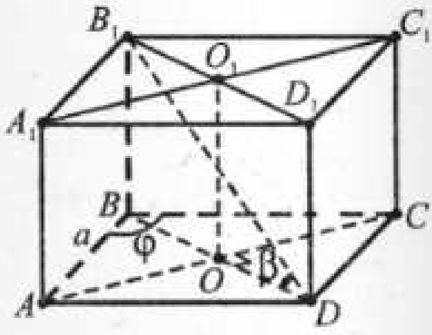
2) $\sin x = 0$; $x = k\pi, k \in Z$. *Відповідь:* $\pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$; $k\pi$, $n, k \in Z$.

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x - 4$. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 12$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x - 12 = 0$; $x^2 - 2x - 4 = 0$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$; $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.

	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Точкою максимуму є точка $x_1 = 1 - \sqrt{5}$. *Відповідь:* $1 - \sqrt{5}$

19. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана пряма призма, $ABCD$ — ромб, $AB = a$. $BB_1 \perp AB$. $BB_1 \perp BC$, тому $\angle CBA$ — кут між площинами двох бічних граней призми, $\angle CBA = \varphi$. $BD < AC$, тому B_1D — менша діагональ призми. BD — проекція діагоналі B_1D на площину основи, тому $\angle B_1DB = \beta$. За властивістю діагоналей ромба $AC \perp BD$, тому ΔAOB — прямокутний;



$\angle ABO = \frac{\varphi}{2}$. З ΔAOB ($\angle O = 90°$): $BO = AB\cos\angle B = a\cos\frac{\varphi}{2}$. Тоді

$BD = 2BO = 2a \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$. З ΔB_1BD ($\angle B = 90°$): $BB_1 = BD\mathrm{tg}\angle D =$

$= 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta$. Отже, $V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = AB \cdot BC\sin\angle ABC \cdot BB_1 =$

$= a \cdot a\sin\varphi \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta = 2a^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta$. *В-дь:* $2a^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta$.

ВАРІАНТ 4

	А	Б	В	Г
1		X		
2				X
3		X		
4			X	
5		X		
6				X
7	–	–	–	–
8	X			
9	X			
10	X			
11	X			
12				X

1. $(12 - 2^3) \cdot 5 = (12 - 8) \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$. *Відповідь*: Б.

2. Через точку $A(-3;\ 2)$ проходить графік рівняння $2x + y = -4$, бо $2 \cdot (-3) + 2 = -4$. *Відповідь*: Г.

3. *Відповідь*: Б.

4. $q = b_2 : b_1 = -32 : 64 = -0{,}5$; $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 64 \cdot (-0{,}5)^3 = -8$. *Відповідь*: В.

5. $\cos(-45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$. *Відповідь*: Б.

6. $\log_5(2x-1) \le 2$; $\log_5(2x-1) \le \log_5 25$; $0 < 2x - 1 \le 25$; $1 < 2x \le 26$; $0{,}5 < x \le 13$. *Відповідь*: Г.

7. $y' = \left(\cos x - x^2\right)' = (\cos x)' - \left(x^2\right)' = -\sin x - 2x$. *Відповідь*: *Серед запропонованих правильної відповіді немає.*

8. $S = \int\limits_0^2 x^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \dfrac{1}{3}\cdot\left(2^3 - 0^3\right) = \dfrac{8}{3} = 2\dfrac{2}{3}$. *Відповідь*: А.

9. $\angle KAC = \angle BAC : 2 = 40° : 2 = 20°$. *Відповідь*: А.

10. Точки, симетричні відносно початку координат, мають протилежні координати. Отже, шуканою є точка $(1;\ -2)$. *Відповідь*: А.

11. $S_{б.} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot h = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30\ (\text{см}^2)$. *Відповідь*: А.

12. Прямі a і m можуть або перетинатися, або бути паралельними та не можуть бути мимобіжними, бо вони належать одній площині α. *В-дь*: Г.

13. $1000^{\lg 3 - \lg 6} - \log_2 \cos 60° = 10^{3\lg\frac{3}{6}} - \log_2 \dfrac{1}{2} = 10^{\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3} - (-1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 1 = 1\dfrac{1}{8}$.

Відповідь: $1\dfrac{1}{8}$.

14. Число 30 має 8 дільників (1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30). Отже, шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$. *Відповідь:* $\dfrac{4}{15}$.

15. $\sqrt{2 + \sqrt{x-1}} = 3$. $2 + \sqrt{x-1} = 9$; $\sqrt{x-1} = 7$; $x - 1 = 49$; $x = 50$. *Відповідь*: 50.

16. Нехай SO — заданий конус, AB — діаметр основи, $AB = 12$ см, $SB : SO = 5 : 4$. Нехай $SB = 5x$, тоді $SO = 4x$,

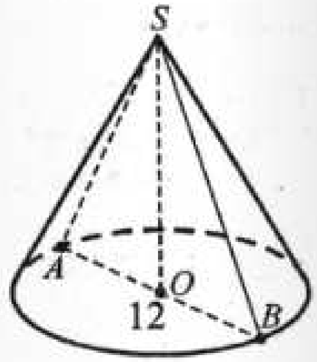
$OB = \frac{1}{2}AB = 6$ (см). З ΔSOB ($\angle O = 90°$):

$SB^2 - SO^2 = OB^2$; $(5x)^2 - (4x)^2 = 6^2$; $25x^2 - 16x^2 = 36$;

$9x^2 = 36$; $x^2 = 4$; $x = 2$ (см).

Таким чином, $SB = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

$S_{п.} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$ (см^2).



Відповідь: 96π см^2.

17. $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$. $2\sin x\cos x + \sqrt{2}\cos x = 0$; $\cos x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$;

1) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + n\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$.

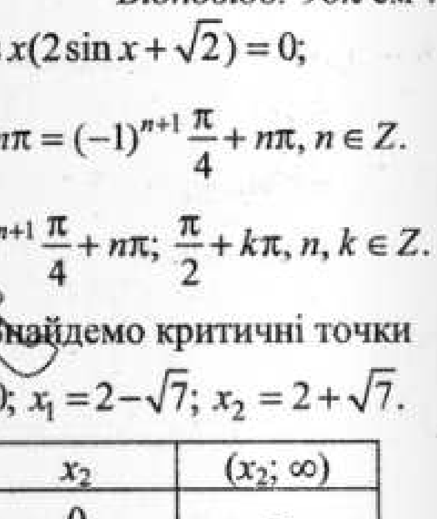
2) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. *Відповідь:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi$; $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $n, k \in Z$.

18. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 9x + 1$. $f'(x) = -3x^2 + 12x + 9$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $-3x^2 + 12x + 9 = 0$; $x^2 - 4x - 3 = 0$; $x_1 = 2 - \sqrt{7}$; $x_2 = 2 + \sqrt{7}$.

	$(-\infty; x_1)$	x_1	$(x_1; x_2)$	x_2	$(x_2; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

Точкою мінімуму є точка $x_1 = 2 - \sqrt{7}$. *Відповідь:* $2 - \sqrt{7}$.

19. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана пряма призма, $ABCD$ — ромб, $AB = a$. $AA_1 \perp AB$. $AA_1 \perp AD$, тому $\angle BAD$ — кут між площинами двох бічних граней призми, $\angle BAD = \alpha$. $BD < AC$, тому A_1C — більша діагональ призми. AC — проекція діагоналі A_1C на площину основи, тому $\angle A_1CA = \beta$. За властивістю діагоналей ромба $AC \perp BD$, тому ΔAOB — прямокутний;



$\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$. З ΔAOB ($\angle O = 90°$): $AO = AB\cos\angle A = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Тоді

$AC = 2AO = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$. З ΔA_1AC ($\angle A = 90°$): $AA_1 = AC\,\mathrm{tg}\angle C =$

$= 2a\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. Отже, $V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = AB \cdot AD\sin\angle BAD \cdot AA_1 =$

$= a \cdot a\sin\alpha \cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta = 2a^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. *Відповідь:* $2a^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$.

ВАРІАНТ 5

	А	Б	В	Г
1			X	
2	X			
3		X		
4			X	
5			X	
6	X			
7		X		
8				X
9				X
10		X		
11			X	
12			X	

1. $3\frac{2}{7}^{\backslash 5} - 2\frac{1}{5}^{\backslash 7} = 1\frac{10-7}{35} = 1\frac{3}{35}$. *Відповідь*: В.

2. $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x-1)^3$. *Відповідь*: А.

3. $\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{108} = \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{36 \cdot 3} =$
$= 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. *Відповідь*: Б.

4. $20 : 3{,}4 = 200 : 34 = \frac{200}{34} = \frac{100}{17} = 5\frac{15}{17}$. Найбільше можна пошити 5 комплектів. *Відповідь*: В.

5. *Відповідь*: В.

6. $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -1;\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$. *Відповідь*: А.

7. $n = P_3 = 3 \cdot 2 = 6$. *Відповідь*: Б.

8. Первісною для функції $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ є $F(x) = -\mathrm{ctg}x + C;\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;

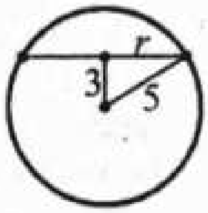
$-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + C = 2$; $-1 + C = 2$; $C = 3$. Отже, $F(x) = -\mathrm{ctg}x + 3$. *Відповідь*: Г.

9. $\vec{a}(-4;1) \cdot \vec{b}(x;8) = 12$; $-4x + 1 \cdot 8 = 12$; $-4x = 4$; $x = -1$. *Відповідь*: Г.

10. $180° - 2 \cdot 75° = 30°$ — кут між бічними сторонами трикутника.

$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 16$ (см²). *Відповідь*: Б.

11. $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (см³). *Відповідь*: В.



12. $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см) — радіус кола перетину;
$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ (см) — довжина кола перетину.
Відповідь: В.

13. $f(x) = 3 - 4\cos x$. $-1 \le \cos x \le 1$; $-4 \le 4\cos x \le 4$; $-4 \le -4\cos x \le 4$;
$-1 \le 3 - 4\cos x \le 7$. Отже, найменше значення функції дорівнює –1, а найбільше — 7. *Відповідь:* –1; 7.

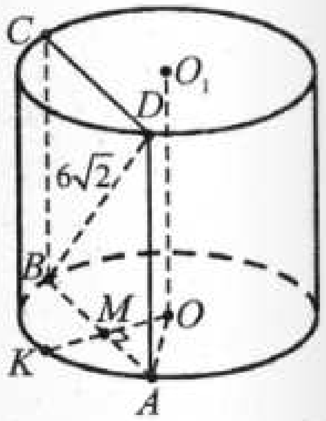
14. $\log_2(x-2) + \log_2(x-4) = 3$. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x-4>0; \end{cases}$ $x > 4$.

$\log_2(x-2)(x-4) = \log_2 8$; $(x-2)(x-4) = 8$; $x^2 - 4x - 2x + 8 = 8$;

$x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$ — не задовольняє умову $x > 4$; $x_2 = 6$. *Відповідь:* 6.

15. Нехай початкова ціна холодильника була x грн. Після зниження на 10% він став коштувати $0{,}9x$ грн, а після другого зниження на 10% ціна склала $0{,}9 \cdot 0{,}9x = 0{,}81x$ (грн). Рівняння: $0{,}81x = 3645$; $x = 3645 : 0{,}81$; $x = 4500$. Отже, початкова ціна холодильника 4500 грн. *В-дь:* 4500 грн.

16. Нехай OO_1 — циліндр, OK — радіус основи, $OM = MK$. Через точку M проведемо переріз, перпендикулярний до радіуса OK. Оскільки вісь циліндра теж перпендикулярна до радіуса OK, то переріз буде паралельним до осі циліндра і цим перерізом є квадрат $ABCD$. $BD = 6\sqrt{2}$ см. З ΔDAB ($\angle A = 90°$): $AD = AB = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$ (см). За властивістю хорди, перпендикулярної до радіуса, $AM = BM = AB : 2 = 6 : 2 = 3$ (см). Нехай $OK = R$, тоді $OM = \dfrac{R}{2}$. З ΔOMA ($\angle M = 90°$):



$$OA^2 - OM^2 = AM^2;\ R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 3^2;\ \frac{3R^2}{4} = 9;\ R^2 = 12;\ R = 2\sqrt{3}\ \text{(см)}.$$

$H = AD = 6$ (см). Тоді маємо: $S_{б.} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\pi\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $24\pi\sqrt{3}$ см^2.

17. $4^{x-1} + 4^{x+2} \ge 130;\ 4^{x-1} + 4^{x-1+3} \ge 130;\ 4^{x-1}(1+4^3) \ge 130;\ 65 \cdot 4^{x-1} \ge 130;$
$4^{x-1} \ge 2;\ 4^{x-1} \ge 4^{0,5};\ x - 1 \ge 0,5; x \ge 1,5; x \in [1,5; +\infty).$

Відповідь: $[1,5; +\infty)$.

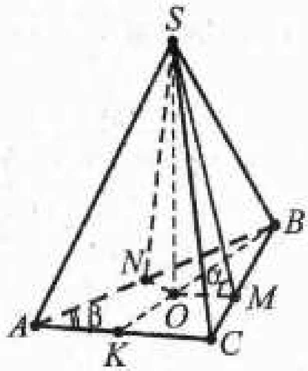
18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3},\ \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$. Рівняння дотичної до графіка функції має вигляд:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0);\ f'(x) = \dfrac{x-3-(x+1)}{(x-3)^2} = -\dfrac{4}{(x-3)^2}$. Знайдемо координати точок дотику. Якщо α — кут між дотичною до графіка заданої функції в точці з абсцисою x_0 та віссю Ox, то $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -\frac{4}{(x_0-3)^2};\ -1 = -\frac{4}{(x_0-3)^2};\ \begin{cases}(x_0-3)^2 = 4,\\ x_0 \ne 3;\end{cases}\ \begin{cases}x_0 - 3 = \pm 2,\\ x_0 \ne 3;\end{cases}\ x_0 = 1$$

або $x_0 = 5$. Тоді: **1)** $y_0 = y(1) = \dfrac{1+1}{1-3} = -1;\ A(1; -1)$; рівняння дотичної $y = -(x-1) + (-1); y = -x$; **2)** $y_0 = y(5) = \dfrac{5+1}{5-3} = 3;\ B(5; 3)$; рівняння дотичної: $y = -(x-5) + 3; y = -x + 8$. Координати точок перетину дотичних з віссю абсцис: 1) прямої $y = -x$: $y = 0, x = 0$; $(0; 0)$; 2) прямої $y = -x + 8$: $y = 0, x = 8$; $(8; 0)$.

Відповідь. $(0; 0), (8; 0)$.



19. Нехай $SABC$ — задана піраміда, ΔABC — рівнобедрений ($AB = BC$), $\angle A = \angle C = \beta$, R — радіус описаного кола навколо трикутника ABC. За наслідком з теореми синусів $BC : \sin\angle A = 2R$; $BC = 2R\sin\beta$;
$AC : \sin\angle B = 2R$; $AC = 2R\sin(180° - 2\beta) = 2R\sin 2\beta$.
$P_{\Delta ABC} = 2 \cdot 2R\sin\beta + 2R\sin 2\beta = 4R\sin\beta(1 + \cos\beta)$.
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC^2 \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 4R^2\sin^2\beta\sin(180° - 2\beta) =$
$= 2R^2\sin^2\beta\sin 2\beta$. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α, тому $S_{б.} = \frac{S_{о.}}{\cos\alpha}$. Тоді $S_{п.} = S_{о.} + S_{б.} =$

$$= S_{\Delta ABC} + \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos\alpha} = S_{\Delta ABC}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 2R^2\sin^2\beta\sin 2\beta\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Відповідь: $2R^2\sin^2\beta\sin 2\beta\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

ВАРІАНТ 6

	А	Б	В	Г
1	X			
2		X		
3				X
4	X			
5			X	
6	X			
7			X	
8			X	
9			X	
10		X		
11			X	
12			X	

1. $4\frac{1}{3}^{\backslash 7}+2\frac{4}{7}^{\backslash 3}=6\frac{7+12}{21}=6\frac{19}{21}$. *Відповідь*: А.

2. $x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$. *Відповідь*: Б.

3. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{0,12}=\sqrt{\frac{2}{8}}-\sqrt{3\cdot 0,12}=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{0,36}=\frac{1}{2}-0,6=$
$=0,5-0,6=-0,1$. *Відповідь*: Г.

4. 200 грн – 70 грн 50 к = 129 грн 50 к. *Відповідь*: А.

5. *Відповідь*: В.

6. $\sin(2x)=1;\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$. *Відповідь*: А.

7. У слові «АЛГЕБРА» всього 7 літер і з них тільки одна літера Б. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{7}$. *Відповідь*: В.

8. $S=\int_0^2 2^x\ln 2dx=2^x\Big|_0^2=2^2-2^0=4-1=3$. *Відповідь*: В.

9. Вектор $\vec{m}(6;-2)$ колінеарний вектору $\vec{a}(-3;1)$, бо $\vec{m}(6;-2)=-2\vec{a}(-3;1)$.
Відповідь: В.

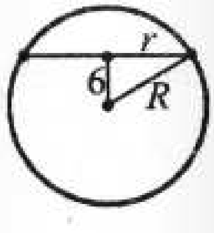
10. $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\sin 60^\circ=50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$ (см^2). *Відповідь*: Б.

11. $S_{п.}=2\cdot 6+12+16+20=60$ (см^2). *Відповідь*: В.

12. $l=2\pi r;\ 2\pi r=16\pi;\ r=8$ (см) — радіус кола перерізу;

$R=\sqrt{8^2+6^2}=10$ (см) — радіус сфери;

$S=4\pi R^2=4\pi\cdot 10^2=400\pi$ (см^2). *Відповідь*: В.



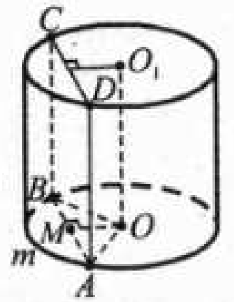
13. $f(x)=3-\sqrt{x}.\ \sqrt{x}\geq 0; -\sqrt{x}\leq 0; 3-\sqrt{x}\leq 3.\ f(x)\in(-\infty;3]$.
Відповідь: $(-\infty;3]$.

14. $3\log_2\sqrt[3]{x}-\log_2 x^4=9$. ОДЗ: $\sqrt[3]{x}>0; x>0$. $3\cdot\frac{1}{3}\log_2 x-4\log_2 x=9;$

$-3\log_2 x=9; \log_2 x=-3; x=\frac{1}{8}$. *Відповідь*: $\frac{1}{8}$.

15. Після першого року на рахунку було 1,1 · 10 000 = 11 000 (грн), а після другого — 1,12 · 11 000 = 12 320 (грн). Отже, вкладник отримав прибуток 12 320 – 10 000 = 2320 (грн). *Відповідь*: 2320 грн.

16. Нехай задано циліндр OO_1, $OO_1 = 6$ см, $ABCD$ — заданий переріз, який є квадратом, $AD \parallel OO_1$.



$\cup AmB = 90°$, тому $\angle AOB = 90°$. Оскільки $AD = OO_1$, то $AD = AB = 6$ см. З рівнобедреного прямокутного трикутника AOB $OA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см). Проведемо $OM \perp AB$.

$OA = OB = R$, тоді прямокутний трикутник AOB — рівнобедрений, OM — медіана й бісектриса. $AM = OM = AB : 2 = 6 : 2 = 3$ (см). Так як $OM \perp OO_1$ і $OO_1 \parallel AD$, то $MO \perp AD$. Отже, пряма OM перпендикулярна до двох непаралельних прямих AB і AD площини перерізу, а тому $OM \perp (ABD)$ і OM є відстанню від прямої OO_1 до паралельної їй площини ABD.

Відповідь: 3 см.

17. $9^{x-1} + 9^{x+1} < 246$; $9^{x-1} + 9^{x-1+2} < 246$; $9^{x-1}(1+9^2) < 246$; $82 \cdot 9^{x-1} < 246$;

$9^{x-1} < 3$; $9^{x-1} < 9^{0,5}$; $x - 1 < 0,5$; $x < 1,5$; $x \in (-\infty; 1,5)$.

Відповідь: $(-\infty; 1,5)$.

18. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+3}$. Рівняння дотичної до графіка функції має вигляд:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$; $f'(x) = \dfrac{2(x+3)-(2x-3)}{(x+3)^2} = \dfrac{9}{(x+3)^2}$. Якщо кутовий коефіцієнт дотичної у точці дотику з абсцисою x_0 дорівнює 9, то

$y'(x_0) = 9$. Звідси знайдемо координати точки дотику: $\dfrac{9}{(x_0+3)^2} = 9$;

$\begin{cases}(x_0+3)^2 = 1, \\ x_0 \neq -3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_0 + 3 = \pm 1, \\ x_0 \neq -3;\end{cases}$ $x_0 = -2$ або $x_0 = -4$. Тоді: **1)** $y_0 = y(-2) =$

$= \dfrac{2\cdot(-2)-3}{-2+3} = -7$; $A(-2; -7)$; **2)** $y_0 = y(-4) = \dfrac{2\cdot(-4)-3}{-4+3} = 11$; $B(-4; 11)$.

Рівняння дотичної у точці $A(-2; -7)$: $y = 9(x+2) + (-7)$; $y = 9x + 11$; у точці $B(-4; 11)$: $y = 9(x-(-4)) + 11$; $y = 9x + 47$.

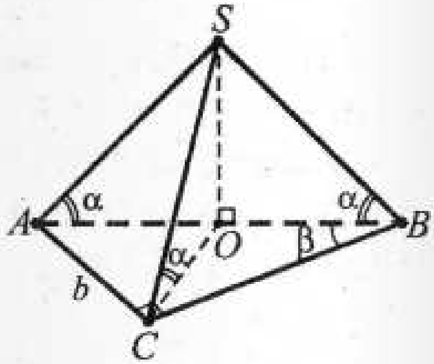
Координати точок перетину дотичних з віссю абсцис: 1) прямої $y = 9x + 11$: $9x + 11 = 0$; $x = -\dfrac{11}{9}$; $x = -1\dfrac{2}{9}$; $\left(-1\dfrac{2}{9}; 0\right)$; 2) прямої

$y = 9x + 47$: $9x + 47 = 0$; $x = -\dfrac{47}{9}$; $x = -5\dfrac{2}{9}$; $\left(-5\dfrac{2}{9}; 0\right)$.

Координати точок перетину дотичних з віссю ординат: 1) прямої $y = 9x + 11$: $y = 9 \cdot 0 + 11 = 11$; (0; 11); 2) прямої $y = 9x + 47$: $y = 9 \cdot 0 + 47 = 47$; (0; 47).

Відповідь. $\left(-1\frac{2}{9}; 0\right)$, $\left(-5\frac{2}{9}; 0\right)$, (0; 11), (0; 47).

19. Нехай $SABC$ — задана піраміда, $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = \beta$, $AC = b$, SO — висота піраміди. Тоді OA, OB і OC — ортогональні проекції бічних ребер на площину основи. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$. З рівності прямокутних трикутників SOA, SOB і SOC (за спільним катетом SO і гострим кутом α) випливає, що $OA = OB = OC$. Отже, точка O є центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника ABC, тобто точка O є серединою гіпотенузи AB. З ΔACB ($\angle C = 90°$):



$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg}\angle B} = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}; \quad AB = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Тоді $S_{о.} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}b \cdot \frac{b}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$; $OA = \frac{1}{2}AB = \frac{b}{2\sin\beta}$.

З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $H = SO = OA\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{2\sin\beta}\operatorname{tg}\alpha$. Отже,

$$V = \frac{1}{3}S_{о.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta} \cdot \frac{b}{2\sin\beta}\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^3\operatorname{tg}\alpha}{12\sin\beta\operatorname{tg}\beta}.$$

Відповідь: $\frac{b^3\operatorname{tg}\alpha}{12\sin\beta\operatorname{tg}\beta}$.

ВАРІАНТ 7

	А	Б	В	Г
1	Х			
2	Х			
3		Х		
4				Х
5			Х	
6		Х		
7			Х	
8	Х			
9			Х	
10		Х		
11				Х
12	Х			

1. $\frac{7}{8}^{\backslash 3}+\frac{1}{12}^{\backslash 2}-\frac{5}{6}^{\backslash 4}=\frac{21+2-20}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$. *Відповідь*: А.

2. $0{,}16-p^2=0{,}4^2-p^2=(0{,}4-p)(0{,}4+p)$. *Відповідь*: А.

3. $\left(-5\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=25\cdot\frac{3}{5}=15$. *Відповідь*: Б.

4. $450=3\cdot100+3\cdot50$. Отже, 3 купюри по 50 грн. *В-дь*: Г.

5. $\sqrt[4]{16}=2$. *Відповідь*: В.

6. $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ x=\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$. *Відповідь*: Б.

7. Шукана ймовірність дорівнює $\frac{7}{20}$. *Відповідь*: В.

8. Первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ є $F(x)=\mathrm{tg}\,x+C;\ F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3$;

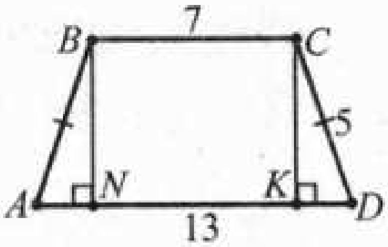
$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+C=-3;\ 1+C=-3;\ C=-4$. Отже, $F(x)=\mathrm{tg}\,x-4$. *Відповідь*: А.

9. $\left|\vec{a}(4;-3)\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$. *Відповідь*: В.

10. $KD=(AD-BC):2=(13-7):2=3$ (см);

$CK=\sqrt{CD^2-KD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (см);

$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CK=\frac{13+7}{2}\cdot4=40$ (см^2). *В-дь*: Б.

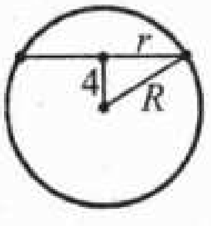


11. $H=150:10=15$ (см). *Відповідь*: Г.

12. $S=\pi r^2;\ \pi r^2=9\pi;\ r^2=9;\ r=3$ см — радіус круга перерізу;

$R=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (см) — радіус кулі;

$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot5^3=\frac{500\pi}{3}$ (см^3). *Відповідь*: А.



13. $f(x)=2\sin x-3$. $-1\le\sin x\le1$; $-2\le2\sin x\le2$; $-5\le2\sin x-3\le-1$. Отже, найменше значення функції дорівнює -5, а найбільше — -1.

Відповідь: -5; -1.

14. $\log_2(5\cdot2^{x+1}-36)=x$. $5\cdot2^{x+1}-36=2^x;\ 5\cdot2\cdot2^x-36=2^x;\ 9\cdot2^x=36;$

$2^x=4;\ x=2$. *Відповідь*: 2.

15. Нехай початкова ціна монітора була x грн, після зниження на 15% він став коштувати $0{,}85x$ грн, а після другого зниження на 10% ціна склала $0{,}9 \cdot 0{,}85x = 0{,}765x$ (грн). Рівняння: $0{,}765x = 1530$; $x = 1530 : 0{,}765$; $x = 2000$. Отже, початкова ціна монітора 2000 грн. *Відповідь:* 2000 грн.

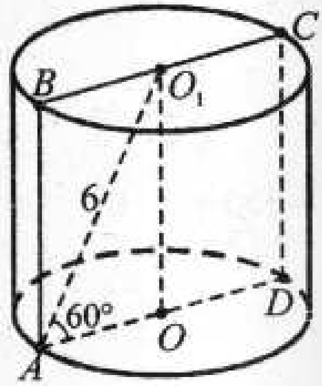
16. Нехай OO_1 — циліндр, $ABCD$ — осьовий переріз, $O_1A = 6$ см. $\angle O_1AO = 60°$. З ΔO_1OA ($\angle O = 90°$):

$OO_1 = O_1A \cdot \sin\angle A = 6 \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}$ (см);

$AO = O_1A \cdot \cos\angle A = 6 \cdot \cos 60° = 3$ (см);

$AD = 2AO = 6$ см; $CD = OO_1 = 3\sqrt{3}$ см.

$S_{ABCD} = AD \cdot CD = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см^2).



Відповідь: $18\sqrt{3}$ см^2.

17. $4^{x-2} + 4^{x+1} \le 130$; $4^{x-2} + 4^{x-2+3} \le 130$; $4^{x-2}(1 + 4^3) \le 130$; $65 \cdot 4^{x-2} \le 130$;

$4^{x-2} \le 2$; $4^{x-2} \le 4^{0,5}$; $x - 2 \le 0{,}5$; $x \le 2{,}5$; $x \in (-\infty; 2{,}5]$.

Відповідь: $(-\infty; 2{,}5]$.

18. $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$. Рівняння дотичної до графіка функції має вигляд:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$; $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$. Якщо кутовий коефіцієнт дотичної у точці дотику з абсцисою x_0 дорівнює 4, то

$y'(x_0) = 4$. Звідси знайдемо координати точки дотику: $\dfrac{4}{(x_0+1)^2} = 4$;

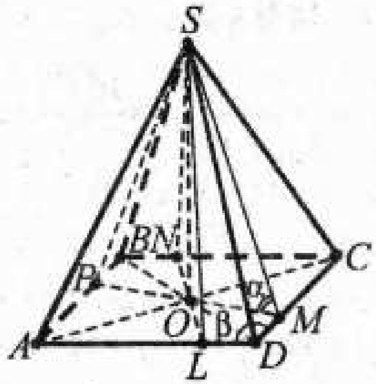
$\begin{cases}(x_0+1)^2 = 1, \\ x_0 \ne -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_0 + 1 = \pm 1, \\ x_0 \ne -1;\end{cases}$ $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Тоді:

1) $y_0 = y(0) = \dfrac{2 \cdot 0 - 2}{0+1} = -2$; $A(0; -2)$; рівняння дотичної $y = 4(x - 0) + (-2)$;

$y = 4x - 2$; **2)** $y_0 = y(-2) = \dfrac{2 \cdot (-2) - 2}{-2+1} = 6$; $B(-2; 6)$; рівняння дотичної $y = 4(x - (-2)) + 6$; $y = 4x + 14$. Координати точок перетину дотичної $y = 4x - 2$ з віссю абсцис: $4x - 2 = 0$; $x = 0{,}5$; $(0{,}5; 0)$; з віссю ординат — $y = 4 \cdot 0 - 2 = -2$; $(0; -2)$. Координати точок перетину дотичної $y = 4x + 14$ з віссю абсцис: $4x + 14 = 0$; $x = -3{,}5$; $(-3{,}5; 0)$; з віссю ординат: $y = 4 \cdot 0 + 14 = 14$; $(0; 14)$.

Відповідь. $(0{,}5; 0)$, $(-3{,}5; 0)$, $(0; -2)$, $(0; 14)$.

19. Нехай $SABCD$ — задана чотирикутна піраміда, $ABCD$ — ромб з тупим кутом $\angle D = \beta$, $BD = d$, SO — висота піраміди. З вершини S піраміди побудуємо перпендикуляри SM, SN, SP і SL відповідно до сторін ромба DC, BC, AB і AD. Тоді $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO = \angle SLO = \alpha$. Маємо: $\Delta SMO = \Delta SNO = \Delta SPO = \Delta SLO$ (за катетом і гострим кутом). Звідси $OM = ON = OP = OL$ і O — центр вписаного у ромб $ABCD$ кола (точка перетину його діагоналей). За властивістю діагоналей ромба



$\angle ADO = \angle ODC = \dfrac{\beta}{2}$. З ΔAOD ($\angle O = 90°$): $AO = OD \operatorname{tg} \angle D = \dfrac{d}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}$. Тоді

$AC = d \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}$. $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} d \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} \cdot d = \dfrac{1}{2} d^2 \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}$. З ΔODM

($\angle M = 90°$): $OM = OD \sin \angle D = \dfrac{d}{2} \sin \dfrac{\beta}{2}$.

З ΔSOM ($\angle O = 90°$): $H = SO = OM \operatorname{tg} \angle M = \dfrac{d}{2} \sin \dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Тоді

$$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{3} S_{\text{о.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{2} d \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{12} d^3 \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{12} d^3 \sin \dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

ВАРІАНТ 8

	А	Б	В	Г
1			X	
2			X	
3		X		
4		X		
5		X		
6				X
7				X
8			X	
9			X	
10		X		
11			X	
12				X

1. $2\frac{5}{9}^{\backslash 2}+1\frac{1}{6}^{\backslash 3}=3\frac{10+3}{18}=3\frac{13}{18}$. *Відповідь*: В.

2. $3m-9=3(m-3)$. *Відповідь*: В.

3. Якщо $a=7$, $b=-2$, то $\sqrt{2a-b}=\sqrt{2\cdot 7-(-2)}=\sqrt{16}=4$. *В-дь*: Б.

4. 24 год – 22 год 30 хв + 7 год 45 хв =
= 1 год 30 хв + 7 год 45 хв = 8 год 75 хв = 9 год 15 хв . *В-дь*: Б.

5. $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$. *Відповідь*: Б.

6. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$; $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+k\pi$;

$x=\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in Z$. *Відповідь*: Г.

7. $7+5=12$ (способів). *Відповідь*: Г.

8. $\int\limits_{-3}^{0}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{0}=0-\frac{(-3)^3}{3}=9$. *Відповідь*: В.

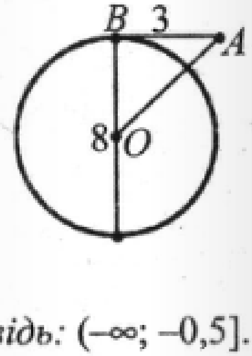
9. $\vec{a}(-2;3)\cdot\vec{b}(4;7)=(-2)\cdot 4+3\cdot 7=13$. *Відповідь*: В.

10. $p=(5+5+8):2=9$ (см); $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$
$=\sqrt{9\cdot(9-5)\cdot(9-5)\cdot(9-8)}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 4\cdot 1}=12$ (см^2). *Відповідь*: Б.

11. $V=6\cdot 2\cdot 5=60$ (см^3). *Відповідь*: В.

12. $OB=8:2=4$ — радіус кулі. Із прямокутного трикутника OBA ($\angle B=90°$) отримаємо: $OA=\sqrt{4^2+3^2}=5$ (см).

Відповідь: Г.



13. $y=-0{,}5-x^2$. $x^2\geq 0$; $-x^2\leq 0$; $-0{,}5-x^2\leq -0{,}5$; $y\in(-\infty;-0{,}5]$.

Відповідь: $(-\infty;-0{,}5]$.

14. $2\log_3(x-1)=\log_3(4x+1)$. ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\4x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\x>-0{,}25;\end{cases}$ $x>1$.

$\log_3(x-1)^2=\log_3(4x+1)$; $(x-1)^2=4x+1$; $x^2-2x+1-4x-1=0$; $x^2-6x=0$;
$x(x-6)=0$; $x_1=6$; $x_2=0$ — не задовольняє ОДЗ. *Відповідь*: 6.

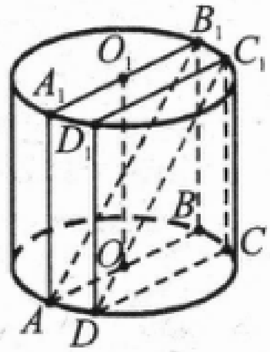
15. Після першого року на рахунку було $1{,}16 \cdot 10\,000 = 11\,600$ (грн), а після другого — $1{,}16 \cdot 11\,600 = 13\,456$ (грн). Отже, вкладник отримав прибуток $13\,456 - 10\,000 = 3456$ (грн).

Відповідь: 3456 грн.

16. Нехай OO_1 — циліндр, його осьовий переріз AA_1B_1B — квадрат. $AB_1 = 8\sqrt{2}$ см. Переріз DD_1C_1C паралельний до осі циліндра, $DC_1 = 10$ см. Оскільки AA_1B_1B — квадрат, то: $AA_1 = A_1B_1 = AB_1 : \sqrt{2} = 8\sqrt{2} : \sqrt{2} = 8$ (см). Тоді $DD_1 = 8$ см. З ΔDD_1C_1 ($\angle D_1 = 90°$): $D_1C_1 = \sqrt{DC_1^2 - DD_1^2} =$

$= \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

Отже, $S_{DD_1C_1C} = DD_1 \cdot D_1C_1 = 8 \cdot 6 = 48$ (см^2).



Відповідь: 48 см^2.

17. $4^{x-3} + 4^{x+1} > 514$; $4^{x-3} + 4^{x-3+4} > 514$; $4^{x-3}(1 + 4^4) > 514$; $257 \cdot 4^{x-3} > 514$; $4^{x-3} > 2$; $4^{x-3} > 4^{0,5}$; $x - 3 > 0{,}5$; $x > 3{,}5$; $x \in (3{,}5; +\infty)$.

Відповідь: $(3{,}5; +\infty)$.

18. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+8}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Рівняння дотичної до графіка функції має вигляд:

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$; $f'(x) = \dfrac{3(x+8) - (3x-1)}{(x+8)^2} = \dfrac{25}{(x+8)^2}$. Знайдемо координати точок дотику. Якщо α — кут між дотичною до графіка заданої функції в точці з абсцисою x_0 та віссю Ox, то $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Маємо:

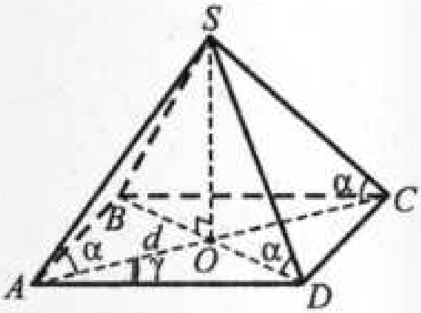
$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{25}{(x_0+8)^2}$; $1 = \dfrac{25}{(x_0+8)^2}$; $\begin{cases}(x_0+8)^2 = 25,\\ x_0 \neq -8;\end{cases}$ $\begin{cases}x_0 + 8 = \pm 5,\\ x_0 \neq -8;\end{cases}$ $x_0 = -13$ або $x_0 = -3$.

Тоді: **1)** $y_0 = y(-13) = \dfrac{3 \cdot (-13) - 1}{-13 + 8} = 8$; $A(-13; 8)$; рівняння дотичної $y = x - (-13) + 8$; $y = x + 21$; **2)** $y_0 = y(-3) = \dfrac{3 \cdot (-3) - 1}{-3 + 8} = -2$; $B(-3; -2)$; рівняння дотичної: $y = x - (-3) - 2$; $y = x + 1$.

Координати точок перетину дотичних з віссю ординат: 1) прямої $y = x + 21$: $y = 0 + 21 = 21$; $(0; 21)$; 2) прямої $y = x + 1$: $y = 0 + 1 = 1$; $(0; 1)$.

Відповідь. $(0; 21)$, $(0; 1)$.

19. Нехай $SABCD$ — задана чотирикутна піраміда, $BD = AC = d$, $\angle CAD = \gamma$. SO — висота піраміди. Тоді OA, OB, OC і OD — ортогональні проекції бічних ребер на площину основи. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \alpha$. З рівності прямокутних трикутників SOA, SOB, SOC і SOD (за спільним катетом SO і гострим кутом α) випливає, що $OA = OB = OC = OD$. Отже, точка O є центром кола, описаного навколо прямокутника $ABCD$. З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $H = SO = OA\,\text{tg}\angle A = \frac{d}{2}\text{tg}\,\alpha$. $\angle AOB$ — зовнішній кут рівнобедреного трикутника AOD, тому



$\angle AOB = 2\angle OAD = 2\gamma$. Тоді $S_{\text{о.}} = \frac{1}{2}AC^2 \sin\angle AOB = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\gamma$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{о.}}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}d^2 \sin 2\gamma\cdot\frac{d}{2}\text{tg}\,\alpha = \frac{d^3}{12}\sin 2\gamma\,\text{tg}\,\alpha.$$

Відповідь: $\frac{d^3}{12}\sin 2\gamma\,\text{tg}\,\alpha$.

ВАРІАНТ 9

1. Швидкість збільшилася на $(100 - 80) : 80 \cdot 100\% = 25\%$. *Відповідь*: Б.

2. $7mn$. *Відповідь*: Б.

3. $\dfrac{3x^2 - 27}{18 - 6x} = \dfrac{3(x^2 - 9)}{-6(x - 3)} = -\dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = -\dfrac{x+3}{2}$. *Відповідь*: Г.

4. Розв'язком нерівності $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ є число -3, бо $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0 \geq 0$. *Відповідь*: А.

5. Рівняння $\operatorname{tg} x = 2$ має розв'язки. *Відповідь*: Г.

6. $2^{x-2} + 2^x = 10; \dfrac{2^x}{2^2} + 2^x = 10; \dfrac{5}{4} \cdot 2^x = 10; 2^x = 8; x = 3$. *В-дь*: В.

7. Шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{1}{2}$. *Відповідь*: Г.

	А	Б	В	Г
1		X		
2		X		
3				X
4	X			
5				X
6			X	
7				X
8		X		
9		X		
10			X	
11				X
12		X		

8. $\int(3\cos x - 2\sin x)dx = \int 3\cos x dx - \int 2\sin x dx = 3\int \cos x dx - 2\int \sin x dx =$
$= 3\sin x + 2\cos x + C$. *Відповідь*: Б.

9. $CD^2 = AD \cdot DB$. *Відповідь*: Б.

10. $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = 2R; R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$ (см). *Відповідь*: В.

11. Відстань між двома довільними точками сфери не може бути більшою від діаметра сфери, який дорівнює $6 \cdot 2 = 12$ (см). *Відповідь*: Г.

12. $S_{о.} = 5^2 = 25$ (см^2); $S_{б.} = S_{п.} - 2S_{о.} = 110 - 2 \cdot 25 = 60$ (см^2);
$P_{о.} = 4 \cdot 5 = 20$ (см); $H = S_{б.} : P_{о.} = 60 : 20 = 3$ (см). *Відповідь*: Б.

13. $\cos(\pi + \alpha)\cos(\alpha - 2\pi) + \sin^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$. *В-дь*: 0.

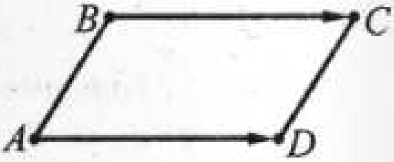
14. $f(x) = 1 - \lg(x-3);\ 1 - \lg(x-3) > 0;\ \lg(x-3) < \lg 10;\ 0 < x - 3 < 10;$
$3 < x < 13; x \in (3; 13)$. *Відповідь*: (3; 13).

15. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x+2}$. ОДЗ: $x \neq -2$. $f'(x) = \dfrac{-2x(x+2) - (3 - x^2)}{(x+2)^2} = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$.

Знайдемо критичні точки: $\dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} = 0;\ x^2 + 4x + 3 = 0;\ x_1 = -3,\ x_2 = -1$.

Відповідь: -3 і -1.

16. Щоб знайти координати точки $A(x; y; z)$, скористаємося рівністю $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AD}(0-x; 11-y; -2-z) = \overrightarrow{BD}(4+2; -2-7; 3-1)$.

Тоді: $-x = 6$; $x = -6$; $11 - y = -9$; $y = 20$; $-2 - z = 2$; $z = -4$.

Отже, $A(-6; 20; -4)$.

Відповідь: $A(-6; 20; -4)$.

17. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = 3$. ОДЗ: $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x+2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -2; \end{cases}$ $x \in [-2; 3]$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $3 - x + 2\sqrt{(3-x)(x+2)} + x + 2 = 9$;

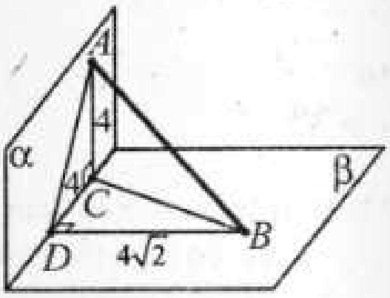
$2\sqrt{(3-x)(x+2)} = 4$; $\sqrt{(3-x)(x+2)} = 2$; $(3-x)(x+2) = 4$;

$3x + 6 - x^2 - 2x - 4 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. *Відповідь:* -1; 2.

18. $\log_9 3 \cdot \lg 5 \cdot \log_{27} 10 = \lg 5 \cdot \dfrac{\lg 3}{\lg 3^2} \cdot \dfrac{1}{\lg 3^3} = \lg 5 \cdot \dfrac{\lg 3}{2\lg 3} \cdot \dfrac{1}{3\lg 3} = \dfrac{\lg 5}{6\lg 3} = \dfrac{1}{6}\log_3 5$.

Відповідь: $\dfrac{1}{3}\log_3 5$.

19. Нехай $\alpha \perp \beta$, CD — лінія перетину площин α і β, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. $AC \perp CD$, $AC = 4$ см, $BD \perp CD$, $BD = 4\sqrt{2}$ см, $CD = 4$ см. Оскільки $\alpha \perp \beta$ і $BD \perp CD$, то $BD \perp \alpha$. Аналогічно $AC \perp \beta$. У ΔACD ($\angle C = 90°$) $AC = CD = 4$ см, тому $AD = AC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см). У прямокутному трикутнику ADB ($\angle D = 90°$)



$AD = BD = 4\sqrt{2}$ см, тому $AB = AD\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$ (см). BC є проекцією AB на площину β, тому $\angle ABC$ — кут, який утворює AB з площиною β.

З ΔACB ($\angle C = 90°$): $\sin \angle B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, звідки $\angle B = 30°$. Аналогічно AD — проекція AB на площину α, тому $\angle BAD$ — кут, який утворює AB з площиною α. У прямокутному ΔADB ($\angle D = 90°$): $AD = DB$, тому $\angle BAD = 45°$. *Відповідь:* $30°$ і $45°$.

ВАРІАНТ 10

	А	Б	В	Г
1	Х			
2				Х
3			Х	
4				Х
5			Х	
6		Х		
7		Х		
8				Х
9		Х		
10			Х	
11	Х			
12	Х			

1. $6\% = 0{,}06$; $300 \cdot 0{,}06 = 18$ (кг). *Відповідь*: А.

2. $(2x - 7) + (3 + 5x) = 2x - 7 + 3 + 5x = 7x - 4$. *Відповідь*: Г.

3. $\frac{3}{2x^2y}^{\backslash 4x^4} = \frac{3 \cdot 4x^4}{8x^6y} = \frac{12x^4}{8x^6y}$. *Відповідь*: В.

4. Не є розв'язком нерівності $x^2 + x - 6 < 0$ число 3, бо $3^2 + 3 - 6 = 6$ і нерівність $6 < 0$ є хибною. *Відповідь*: Г.

5. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. *Відповідь*: В.

6. $3^{x^2+x} = 9; 3^{x^2+x} = 3^2$; $x^2 + x = 2$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. *Відповідь*: Б.

7. Із 6 чисел на гранях кубика парних чисел є 3. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. *Відповідь*: Б.

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x - \sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \cos\Big|_0^{\pi/2} =$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$. *Відповідь*: Г.

9. $B_1C_1 : BC = A_1B_1 : AB = 3 : 2$. *Відповідь*: Б.

10. $1 < \sqrt{3} < 2$., тому $AB < AC < BC$; $\angle C < \angle B < \angle A$. Оскільки $2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$, то ΔABC — прямокутний, $\sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тому $\angle B = 60°$. *Відповідь*: В.

11. $r = 10 : 2 = 5$ (см); $S = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (см^2). *Відповідь*: А.

12. $3^2 + 6^2 = 45$ (см^2) — квадрат діагоналі основи;
$\sqrt{7^2 - 45} = \sqrt{4} = 2$ (см) — висота паралелепіпеда;
$S_{пов} = S_{біч} + 2S_{осн} = 2 \cdot (3 + 6) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ (см^2). *Відповідь*: А.

13. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Кут α лежить в III чверті, тоді $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$
$= -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$. $\sin 2\alpha = 2\cdot(-0{,}8)\cdot(-0{,}6) = 0{,}96$. *Відповідь*: 0,96.

14. $\log^2_{0,5} x - \log_{0,5} x - 2 \le 0$. Введемо заміну $\log_{0,5} x = y$ й отримаємо:
$y^2 - y - 2 \le 0$; $(y + 1)(y - 2) \le 0$; $-1 \le y \le 2$. Повернемося до заміни:
$-1 \le \log_{0,5} x \le 2$; $\log_{0,5} 2 \le \log_{0,5} x \le \log_{0,5} 0{,}25$; $0{,}25 \le x \le 2$; $x \in [0{,}25; 2]$.
Відповідь: $[0{,}25; 2]$.

15. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+5.$ $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+5\right)'=x^2-2x-8.$

$f'(x)<0;$ $x^2-2x-8<0;$ $(x-4)(x+2)<0;$ $x\in(-2;\ 4).$

Отже, проміжком спадання є $[-2; 4]$. *Відповідь*: $[-2; 4]$.

16. $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos120°=2\cdot3^2-3\cdot2\cos120°=$

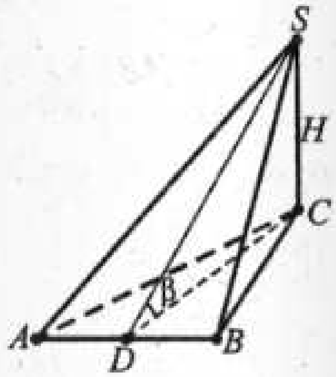
$=18-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=21.$ *Відповідь:* 21.

17. $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3.$ ОДЗ: $\begin{cases}2-x\ge0,\\x+3\ge0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le2,\\x\ge-3;\end{cases}$ $x\in[-3;2]$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $2-x+2\sqrt{(2-x)(x+3)}+x+3=9;$

$2\sqrt{(2-x)(x+3)}=4;$ $\sqrt{-x^2-x+6}=2;$ $-x^2-x+6=4;$ $x^2+x-2=0;$

$x_1=-2, x_2=1.$ *Відповідь:* -2; 1.

18. $\log_7 2\cdot\lg7\cdot\log_{16}10=\log_7 2\cdot\frac{1}{\log_7 10}\cdot\frac{\log_7 10}{\log_7 16}=\frac{\log_7 2}{\log_7 2^4}=\frac{1}{4}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{4}$.



19. Нехай $SABC$ — задана піраміда, ΔABC — рівносторонній, $(SAC)\perp(ABC)$ і $(SBC)\perp(ABC)$. Тоді пряма SC перетину площин SAC і SBC перпендикулярна до площини основи, $SC\perp(ABC)$. Отже, SC — висота піраміди і $SC=H$. Побудуємо $CD\perp AB$, тоді $SD\perp AB$ і $\angle SDC=\beta$. З ΔSCD ($\angle C=90°$): $SD=\frac{SC}{\sin\angle D}=\frac{H}{\sin\beta};$

$CD=\frac{SC}{\text{tg}\,\angle D}=\frac{H}{\text{tg}\,\beta}$. З рівностороннього трикутника

ABC: $BC=\frac{DC}{\sin60°}=\frac{H}{\text{tg}\,\beta\cdot\sin60°}=\frac{2H}{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\beta}.$ $S_{б.}=2S_{SBC}+S_{ASB}=BC\cdot SC+$

$+\frac{1}{2}AB\cdot SD=BC\left(SC+\frac{1}{2}SD\right)=\frac{2H}{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\beta}\left(H+\frac{H}{2\sin\beta}\right)=\frac{H^2}{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\beta}\left(2+\frac{1}{\sin\beta}\right).$

Відповідь: $\frac{H^2}{\sqrt{3}\,\text{tg}\,\beta}\left(2+\frac{1}{\sin\beta}\right).$

ВАРІАНТ 11

	А	Б	В	Г
1	X			
2		X		
3	X			
4		X		
5	X			
6		X		
7			X	
8		X		
9		X		
10			X	
11				X
12	X			

1. Ціна знизилася на (50 – 40) : 50 · 100% = 20%. *Відповідь*: А.

2. $-2a^2b$. *Відповідь*: Б.

3. $\dfrac{8y^2-2}{8-16y}=\dfrac{2(4y^2-1)}{-8(2y-1)}=-\dfrac{(2y-1)(2y+1)}{4(2y-1)}=-\dfrac{2y+1}{4}$. *В-дь*: А.

4. Число –1 є розв'язком нерівності $x^2-2x\ge 0$, бо $(-1)^2-2\cdot(-1)=1+2=3\ge 0$. *Відповідь*: Б.

5. $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. *Відповідь*: А.

6. $5^{x+3}-25\ne 0;\ 5^3\cdot 5^x\ne 25;\ 5^x\ne 5^{-1};\ x\ne -1;$
$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. *Відповідь*: Б.

7. Дільниками числа 24 не більшими 6 є числа 1, 2, 3, 4, 6 — усього 5 чисел. Шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{5}{6}$. *В-дь*: В.

8. Первісною для функції $f(x)=8x^7$ є $F(x)=x^8+C$. *Відповідь*: Б.

9. $\angle N=\angle B=105°$. *Відповідь*: Б.

10. $\angle B=180°-135°-15°=30°;\ \dfrac{AB}{\sin\angle C}=\dfrac{AC}{\sin\angle B};$

$$AC=\frac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{2\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 135°}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 0{,}5}{\sqrt{2}/2}=2\ (\text{см}).$$ *Відповідь*: В.

11. $l=6:\cos 60°=6:0{,}5=12$ (см). *Відповідь*: Г.

12. $d=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$ (см) — діагональ основи; $S=6\cdot 5=30$ (см^2). *В-дь*: А.

13. $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$
$$=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$ *Відповідь*: $\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

14. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,5}(x-2)}}$. $\log_{0,5}(x-2)>0;\ \log_{0,5}(x-2)>\log_{0,5}1;\ \begin{cases}x-2>0,\\x-2<1;\end{cases}\ \begin{cases}x>2,\\x<3;\end{cases}\ x\in(2;3).$

Відповідь: (2; 3).

15. $y=x^2-\dfrac{x^3}{3}+3x-\dfrac{1}{3}$. $y'=2x-x^2+3=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$. Знайдемо критичні точки: $y'=0;\ (x+1)(x-3)=0;\ x_1=-1;\ x_2=3$. Розіб'ємо область визначення критичними точками на проміжки. Визначимо знак похідної на кожному з них:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$x = -1$ — точка мінімуму, $x = 3$ — точка максимуму.

Відповідь: Точка мінімуму — $x = -1$, точка максимуму — $x = 3$.

16. $A(2; 3; 3)$, $B(3; 1; 4)$. За умовою, шукана точка C лежить на осі абсцис, тому $C(x; 0; 0)$ і $AC^2 = BC^2$.
$AC^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2 + (0-3)^2 = x^2 - 4x + 22;$
$BC^2 = (x-3)^2 + (0-1)^2 + (0-4)^2 = x^2 - 6x + 26;$
$x^2 - 4x + 22 = x^2 - 6x + 26$; $2x = 4$; $x = 2$. Отже, $C(2; 0; 0)$. *В-дь:* $C(2; 0; 0)$.

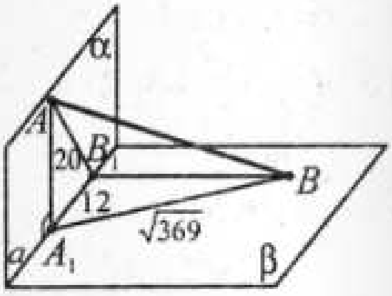
17. $\sqrt{8-x} + \sqrt{x+2} = 4$. ОДЗ: $\begin{cases} 8 - x \geq 0, \\ x + 2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -2; \end{cases}$ $x \in [-2; 8]$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $8 - x + 2\sqrt{(8-x)(x+2)} + x + 2 = 16;$

$2\sqrt{(8-x)(x+2)} = 6;$ $\sqrt{-x^2 + 6x + 16} = 3;$ $-x^2 + 6x + 16 = 9;$
$x^2 - 6x - 7 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. *Відповідь:* $-1; 7$.

18. $\log_{11} 3 \cdot \lg 11 \cdot \log_{81} 10 = \log_{11} 3 \cdot \dfrac{1}{\log_{11} 10} \cdot \dfrac{\log_{11} 10}{\log_{11} 81} = \dfrac{\log_{11} 3}{\log_{11} 3^4} = \dfrac{1}{4}.$

Відповідь. $\dfrac{1}{4}$.

19. Нехай α і β — площини, $\alpha \perp \beta$, a — лінія їх перетину, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Побудуємо $AA_1 \perp a$. Оскільки $AA_1 \subset \alpha$ і $\alpha \perp \beta$, то $AA_1 \perp \beta$. Аналогічно побудуємо $BB_1 \perp a$, тоді $BB_1 \perp \alpha$. Отже, проекція відрізка AB на площину β — відрізок A_1B, а на площину α — відрізок AB_1. Отже, $AB_1 = 20$ см, $A_1B = \sqrt{369}$ см,



$A_1B_1 = 12$ см. З ΔA_1BB_1 ($\angle B_1 = 90°$): $BB_1^2 = 369 - 12^2 = 225$.

З ΔAB_1B ($\angle B_1 = 90°$): $AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{20^2 + 225} = \sqrt{625} = 25$ (см).

Відповідь: 25 см.

ВАРІАНТ 12

	А	Б	В	Г
1		X		
2	X			
3	X			
4				X
5			X	
6		X		
7			X	
8		X		
9			X	
10	X			
11		X		
12		X		

1. $30\% = 0{,}3$; $240 \cdot 0{,}3 = 72$ (т). *Відповідь*: Б.

2. $(2x^2 - 3x + 5) - (2x^2 - 5x - 1) = 2x^2 - 3x + 5 - 2x^2 + 5x + 1 =$
$= 2x + 6$. *Відповідь*: А.

3. $\frac{a^8}{10} \cdot \frac{5}{a^2} = \frac{a^8 \cdot 5}{10 \cdot a^2} = \frac{a^6}{2}$. *Відповідь*: А.

4. Число 1 є розв'язком нерівності $x^2 - x \geq 0$, бо
$1^2 - 1 \geq 0$; $0 \geq 0$. *Відповідь*: Г.

5. *Відповідь*: В.

6. $4^{x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}$; $4^{x-2} = 4^{-(2x-1)}$; $x - 2 = -2x + 1$; $3x = 3$; $x = 1$.

Відповідь: Б.

7. Із 9 подій сприятливих є 2. Тому $P = \frac{2}{9}$. *Відповідь*: В.

8. Первісною для функції $f(x) = 5e^x$ є $F(x) = 5e^x + C$; $F(0) = -2$;

$5e^0 + C = -2$; $5 \cdot 1 + C = -2$; $C = -7$. Отже, $F(x) = 5e^x - 7$. *Відповідь*: Б.

9. $\angle B = \angle L = 70°$; $\angle C = 180° - 30° - 70° = 80°$. *Відповідь*: В.

10. $\angle B = 180° - 60° = 120°$. За теоремою косинусів отримаємо:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos 120° =$

$= 16 + 49 + 28 = 93$; $AC = \sqrt{93}$ см. *Відповідь*: А.

11. $R = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (см). *Відповідь*: Б.

12. $H = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (см), $S_{б.} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ (см^2). *Відповідь*: Б.

13. $\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{1-\cos\beta} = \sin\beta \cdot \frac{1-\cos\beta+1+\cos\beta}{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)} = \frac{2\sin\beta}{1-\cos^2\beta} = \frac{2\sin\beta}{\sin^2\beta} = \frac{2}{\sin\beta}$.

Відповідь: $\frac{2}{\sin\beta}$.

14. $\log_3^2 x < 4$; $\log_3^2 x - 4 < 0$; $(\log_3 x + 2)(\log_3 x - 2) < 0$; $-2 < \log_3 x < 2$; $\log_3 \frac{1}{9} < \log_3 x < \log_3 9$;

$\frac{1}{9} < x < 9$. Нерівність задовольняють 8 цілих чисел від 1 до 8. *В-дь:* 8.

15. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$ Знайдемо критичні точки на відрізку [1; 4]:

$\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0$; $\frac{2}{x^2} = \frac{1}{2}$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$ — не підходить, $x_2 = 2$. Порівняємо значення функції $f(1)$, $f(2)$ і $f(4)$: $f(1) = \frac{1}{2}+\frac{2}{1} = 2\frac{1}{2}$; $f(2) = 2$; $f(4) = 2\frac{1}{2}$.

Отже, $\min\limits_{[1;4]} f(x) = f(2) = 2$. *Відповідь*: 2.

16. $\vec{a}(2; m-5; -6)$, $|\vec{a}| = 7$. $2^2+(m-5)^2+(-6)^2 = 7^2$; $4+m^2-10m+25+36 = 49$; $m^2-10m+65 = 49$; $m^2-10m+16 = 0$; $m_1 = 2$, $m_2 = 8$. *Відповідь:* 2; 8.

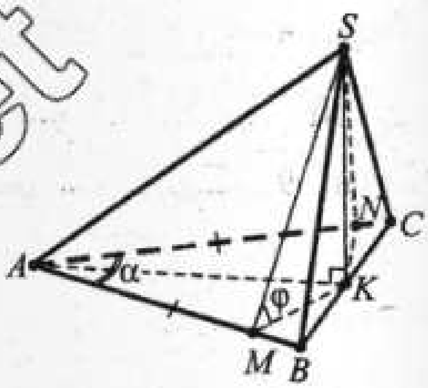
17. $\sqrt{x+8}+\sqrt{2-x} = 4$. ОДЗ: $\begin{cases} x+8 \ge 0, \\ 2-x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -8, \\ x \le 2; \end{cases}$ $x \in [-8; 2]$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $x+8+2\sqrt{(x+8)(2-x)}+2-x = 16$;

$2\sqrt{(2x-x^2+16-8x} = 6$; $\sqrt{-x^2-6x+16} = 3$; $-x^2-6x+16 = 9$;

$x^2+6x-7 = 0$; $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. *Відповідь:* –7; 1.

18. $\log_{17}2 \cdot \lg 17 \cdot \log_8 10 = \log_{17}2 \cdot \frac{1}{\log_{17}10} \cdot \frac{\log_{17}10}{\log_{17}8} = \frac{\log_{17}2}{\log_{17}2^3} = \frac{1}{3}$. *В-дь.* $\frac{1}{3}$.

19. Нехай $SABC$ — задана піраміда, ΔABC — рівнобедрений ($AB = AC$), $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Грань SBC перпендикулярна до площини основи, тоді висота піраміди SK лежить у цій грані. Проведемо $SM \perp AB$ і $SN \perp AC$. За теоремою про три перпендикуляри $KM \perp AB$ і $KN \perp AC$. Тоді $\angle SMK = \angle SNK = \varphi$. $\Delta SKM = \Delta SKN$ (за катетом SK і гострим кутом φ), звідки $KM = KN$, тому точка K належить бісектрисі кута BAC, а значить K — середина BC, $BK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$. У ΔAKB $\angle A = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$.



З ΔAKB ($\angle K = 90°$): $AB = \frac{BK}{\sin\angle A} = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}$; $AK = \frac{BK}{\operatorname{tg}\angle A} = \frac{a}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}$.

З ΔAMK ($\angle M = 90°$): $KM = AK\sin\angle A = \frac{a}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\cos(\alpha/2)$.

З ΔSKM ($\angle K = 90°$): $SK = KM\operatorname{tg}\angle M = \frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$;

$SM = \frac{KM}{\cos\angle M} = \frac{a\cos(\alpha/2)}{2\cos\varphi}$. Отже, $S_{б.} = 2S_{\Delta ASB}+S_{\Delta BSC} =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SM+\frac{1}{2}BC\cdot SK = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}\cdot\frac{a\cos(\alpha/2)}{2\cos\varphi}+\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi =$

$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\cos\varphi}+\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)$. *Відповідь:* $\frac{a^2}{4}\left(\frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\cos\varphi}+\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)$.